

1. Gesucht ist das Schaubild der Funktion

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = f(x, y) \quad \text{mit } r = \text{konst.}$$

2. Wie groß ist der Anstiegswinkel α der Tangente, die im Punkt $p_0 (x_0 = 2 ; y_0 = 1)$ an die Fläche $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ angelegt ist und parallel zur y, z -Achse verläuft?

3. Bilden Sie die ersten partiellen Ableitungen der Funktion

$$z = 3x^2 + yx - y^2 - 4x - 5y + 6 \quad \text{an der Stelle } x = 2 ; y = -3$$

4. Bilden Sie die ersten partiellen Ableitungen der Funktion

$$z = e^x \cos y + \sqrt{x^2 - y^2}$$

5. Bilden Sie die ersten partiellen Differentialquotienten der Funktion

$$u = z \cdot \sin x + \ln(x^2 - y^2) = f(x ; y ; z)$$

6. Berechnen Sie die 1. und 2. partiellen Ableitungen der Funktionen

a) $z = x^2 + 5xy - \frac{1}{2}y^2 + 3x - \frac{3}{2}y + 10$ und

b) $z = 2x^3 \cdot \sin 2y$

7. Zeigen Sie für die Funktion $u = \frac{2y}{x} \tan z$

die Gleichheit der gemischten partiellen Ableitungen 3. Ordnung u_{xyz} und u_{zyx} .

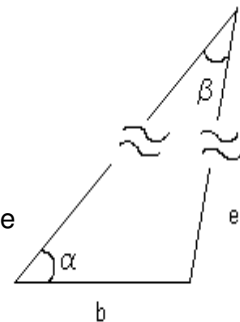
8. Bestimmen Sie Δz und dz der Funktion $z = 2x + y^2$ an der Stelle $(3 ; 5)$ für $\Delta x = 0,3$ und $\Delta y = 0,2$.

9. Berechnen Sie das totale Differential von $z = x \cdot y$

10. Wie lautet das totale Differential der Funktion

$$u = \frac{x}{\sqrt{y^2 - z^2}} \quad ?$$

11. Zur Bestimmung der unzugänglichen Entfernung e wurden in einem Hilfsbereich die Strecke $b = 130$ m, die Winkel $\alpha = 63^\circ$ und $\beta = 75^\circ$ gemessen. Der Messfehler der Seite wurde mit $\Delta b = \pm 0,05$ m und die der Winkel wurden mit $\Delta \alpha = \Delta \beta = \pm 2'$ festgestellt. Wie groß ist die Ungenauigkeit bei der Ermittlung der Seite e ?



12. Zur Berechnung des elektrischen Widerstandes R wurde die Stromstärke

$I = (15 \pm 0,3)A$ und die Spannung $u = (110 \pm 2) V$ gemessen. Wie groß ist der relative Fehler von R ?

13. Berechnen Sie den Neigungswinkel der Tangente, die im Punkt $p_0 (1 ; 2)$ an der Kurve $x^4 - 3x^2y + y^3 - 3 = 0$ angelegt ist.

14. Stellen Sie die Tangentengleichung der Parabel $F(x ; y) = y^2 - 2px = 0$ für den Berührungspunkt $p_0 (x_0 ; y_0)$ auf.

2) $\alpha = 153^\circ 26'$

3) $\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{\substack{x=2 \\ y=-3}} = 5$; $\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{\substack{x=2 \\ y=-3}} = 3$

4) $\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right] = e^x \cos y + \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$; $\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right] = -e^x \sin y - \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

5) $\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = z \cos x + \frac{2x}{x^2 - y^2}$; $\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] = \frac{-2y}{x^2 - y^2}$; $\left[\frac{\partial u}{\partial z}\right] = \sin x$

6) a) $z_x = 2x + 5y + 3$; $z_y = 5x - y - 3/2$
 $z_{xx} = 2$; $z_{yy} = -1$
 $z_{xy} = z_{yx} = 5$

b) $z_x = 6x^2 \sin 2y$; $z_y = 4x^3 \cos 2y$
 $z_{xx} = 12x \sin 2y$; $z_{yy} = -8x^3 \sin 2y$
 $z_{xy} = z_{yx} = 12x^2 \cos 2y$

7) $u_{xyz} = u_{zyx} = -2 / (x^2 \cos^2 z)$

8) $\Delta z = 2,64$; $dz = 2,60$

9) $dz = ydx + xdy$; $\Delta z = ydx + xdy + dx dy$

10) $du = \frac{1}{\sqrt{y^2 - z^2}} dx - \frac{xy}{\sqrt{y^2 - z^2}^3} dy + \frac{xz}{\sqrt{y^2 - z^2}^3} dz$

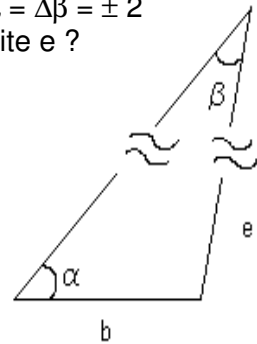
11) $e = 119,92 \text{ m} \pm 0,10 \text{ m}$

12) $\Delta R_{\max} / R = \pm 4\%$

13) $\alpha = 41^\circ 38'$

14) $y = p (x + x_0) / y_0$

11. Zur Bestimmung der unzugänglichen Entfernung e wurden in einem Hilfsbereich die Strecke $b = 130 \text{ m}$, die Winkel $\alpha = 63^\circ$ und $\beta = 75^\circ$ gemessen. Der Messfehler der Seite wurde mit $\Delta b = \pm 0,05 \text{ m}$ und die der Winkel wurden mit $\Delta \alpha = \Delta \beta = \pm 2'$ festgestellt. Wie groß ist die Ungenauigkeit bei der Ermittlung der Seite e ?



Lösung:

$$\text{Sinussatz: } \frac{b}{\sin \beta} = \frac{e}{\sin \alpha} \Rightarrow e = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\Delta e \approx \left| \frac{\partial e}{\partial b} \cdot \Delta b \right| + \left| \frac{\partial e}{\partial \alpha} \cdot \Delta \alpha \right| + \left| \frac{\partial e}{\partial \beta} \cdot \Delta \beta \right|$$

$$\Delta e \approx \left| \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \Delta b \right| + \left| \frac{b \cdot \cos \alpha}{\sin \beta} \cdot \Delta \alpha \right| + \left| \frac{-b \sin \alpha \cos \beta}{\sin^2 \beta} \cdot \Delta \beta \right|$$

$$\Delta \alpha = \Delta \beta = \frac{2' \cdot \pi}{\frac{60'}{\circ} \cdot 180^\circ} = 0,0005818$$

$$\Delta e \approx \left| \frac{\sin 63^\circ}{\sin 75^\circ} \cdot 0,05 \text{ m} \right| + \left| \frac{130 \text{ m} \cdot \cos 63^\circ}{\sin 75^\circ} \cdot \Delta \alpha \right| + \left| \frac{-130 \text{ m} \sin 63^\circ \cos 75^\circ}{\sin^2 75^\circ} \cdot \Delta \beta \right|$$

$$\Delta e \approx \left| 0,04612 \text{ m} \right| + \left| 0,03554 \text{ m} \right| + \left| -0,01869 \text{ m} \right| = \pm 0,1003 \text{ m}$$