

Integration durch Partialbruchzerlegung $U(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = G(x) + \frac{Z^*(x)}{N(x)}$

1. Zerlegen Sie in eine Summe aus ganzrationaler und gebrochen rationaler Funktion:

a) $\frac{x^4 - 3x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$

b) $\frac{x - 5}{3 - x}$

2. Zerlegen Sie in Linearfaktoren: $x^3 + 3x^2 - 4$
(Siehe Papula Bd. 1 187 ff)

3. Die Gestalt der Partialbrüche hängt von der Beschaffenheit der Nullstellen der Nennerfunktion $N(x)$ des Integranden ab:

- a) $N(x)$ hat nur reelle einfache, voneinander verschiedene Nullstellen
- b) $N(x)$ hat nur reelle aber auch mehrfache Nullstellen
- c) $N(x)$ enthält komplexe Nullstellen (wird hier nicht näher betrachtet)

zu a) $\int \frac{3x - 5}{x^2 + 2x - 8} dx$ $\int \frac{x^2 - 31x + 94}{x^3 + 4x^2 - 19x + 14} dx$

$\int \frac{x + 20}{x^2 + 5x - 6} dx$ $\int \frac{11x + 16}{x^2 - 2x - 8} dx$

zu b) $\int \frac{-14x^4 + 5x^3 + 44x^2 - 8x + 18}{(x - 1)^3 (x + 2)^2} dx$

4.

$\int \frac{x^2 + 15x + 8}{x^3 - 3x^2 - 9x - 5} dx$

$$1. \quad a) \quad \frac{x^4 - 3x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = x^2 - 2 + \frac{x - 3}{x^2 - 1}$$

$$b) \quad \frac{x - 5}{3 - x} = -1 - \frac{2}{3 - x}$$

$$2. \quad x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1) \cdot (x^2 + 4x + 4) = (x - 1) \cdot (x + 2)^2$$

$$3. \quad a) \quad \int \frac{3x - 5}{x^2 + 2x - 8} dx = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x - 2} + \frac{17}{6} \int \frac{dx}{x + 4} = \frac{1}{6} \ln(x - 2) + \frac{17}{6} \ln(x + 4) + C$$

$$\int \frac{x^2 - 31x + 94}{x^3 + 4x^2 - 19x + 14} dx = -8 \int \frac{dx}{x - 1} + 4 \int \frac{dx}{x - 2} + 5 \int \frac{dx}{x + 7}$$

$$= \ln \left[\frac{(x - 2)^4 \cdot (x + 7)^5}{(x - 1)^8} \right] + C$$

$$\int \frac{x + 20}{x^2 + 5x - 6} dx = \int \frac{3 dx}{x - 1} - \int \frac{2 dx}{x + 6} = \ln \left[\frac{(x - 1)^3}{(x + 6)^2} \right] + C$$

$$\int \frac{11x + 16}{x^2 - 2x - 8} dx = \int \frac{10 dx}{(x - 4)} + \int \frac{dx}{x + 2} = \ln[(x - 4)^{10} \cdot (x + 2)] + C$$

$$b) \quad \int \frac{-14x^4 + 5x^3 + 44x^2 - 8x + 18}{(x - 1)^3(x + 2)^2} dx$$

$$= 5 \int \frac{dx}{(x - 1)^3} + \int \frac{dx}{(x - 1)^2} - 4 \int \frac{dx}{x - 1} + 2 \int \frac{dx}{(x + 2)^2} - 10 \int \frac{dx}{x + 2}$$

$$= \frac{-5}{2(x - 1)^2} - \frac{1}{x - 1} - 4 \ln(x - 1) - \frac{2}{x + 2} - 10 \ln(x + 2) + C$$

$$4. \quad \int \frac{x^2 + 15x + 8}{x^3 - 3x^2 - 9x - 5} dx = \int \frac{dx}{(x + 1)^2} - 2 \int \frac{dx}{x + 1} + 3 \int \frac{dx}{x - 5}$$

$$= -\frac{1}{x + 1} + \ln \left[\frac{(x - 5)^3}{(x + 1)^2} \right] + C$$

$$\int \frac{(3x-5) dx}{x^2+2x-8}$$

entspricht diesem Fall, denn aus $x^2 + 2x - 8 = 0$ folgt $x_1 = 2$ und $x_2 = -4$.

Also ist $x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$ und

$$\int \frac{(3x-5) dx}{x^2+2x-8} = \int \frac{(3x-5) dx}{(x-2)(x+4)}.$$

Das Integral ist in dieser Form nicht lösbar, aber es ist immer möglich, den Integranden in

$$\frac{3x-5}{x^2+2x-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4}$$

zu zerlegen.

Der Hauptnenner der rechten Seite ist mit dem Nenner der linken Seite identisch. Die Koeffizienten A und B , die bisher noch nicht bekannt sind, müssen noch der Bedingung entsprechend bestimmt werden. Die auf der rechten Seite stehenden *Partialbrüche* können mit Hilfe des Grundintegrals $\int \frac{dx}{x}$ leicht integriert werden.

Das Augenmerk muß sich also zunächst auf die Bestimmung der Koeffizienten A und B richten.

Koeffizientenbestimmung durch Einsetzen

Multipliziert man

$$\frac{3x-5}{x^2+2x-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4}$$

mit $N(x) = x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$, so folgt

$$3x-5 = A(x+4) + B(x-2).$$

Diese Gleichung gilt für jedes x . Es genügt, zwei spezielle x -Werte einzusetzen, um zwei Bestimmungsgleichungen für die gesuchten Werte A und B zu erhalten. Setzt man $x = x_1 = 2$ und $x = x_2 = -4$ ein, also nacheinander die Nullstellen der Nennerfunktion, ergeben sich besonders einfache Bestimmungsgleichungen für A und B , weil der jeweilige Linearfaktor $(x - x_i) = 0$ wird.

Man erhält aus

$$3x-5 = A(x+4) + B(x-2)$$

$$\text{für } x = x_1 = 2 \quad 6-5 = A(2+4) + B(2-2)$$

$$\text{für } x = x_2 = -4 \quad -12-5 = A(-4+4) + B(-4-2)$$

$$\begin{aligned} \text{Daraus folgt} \quad 1 &= 6A_1 & A &= \frac{1}{6} \\ -17 &= -6A_2 & B &= \frac{17}{6}. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\frac{3x-5}{x^2+2x-8} = \frac{1}{6} \frac{1}{x-2} + \frac{17}{6} \frac{1}{x+4}$$

$$\text{und deshalb} \quad \int \frac{(3x-5) dx}{x^2+2x-8} = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{17}{6} \int \frac{dx}{x+4}.$$

Die Integration der Partialbrüche ist ohne Schwierigkeiten möglich:

$$\int \frac{(3x-5) dx}{x^2+2x-8} = \frac{1}{6} \ln|x-2| + \frac{17}{6} \ln|x+4| + C.$$

Die Koeffizienten können auch durch andere Verfahren bestimmt werden. Häufig benutzt man den sogenannten Koeffizientenvergleich. Er sei am gleichen Beispiel erläutert. Die Betrachtung kann ohne Nachteil für das Folgende übergangen werden.

$$\int \frac{(3x-5) dx}{x^2+2x-8} \qquad \frac{3x-5}{x^2+2x-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4}$$

$$3x-5 = A(x+4) + B(x-2)$$

$$3x-5 = (A+B)x + (4A-2B).$$

Die Gleichheit kann nur erfüllt sein, wenn

$$\left| \begin{array}{l} 3 = A + B \\ -5 = 4A - 2B \end{array} \right| \qquad \text{ist.}$$

und

Dieser Koeffizientenvergleich ergibt also ein leicht lösbares Gleichungssystem, aus dem in Übereinstimmung mit den Ergebnissen des Einsetzungsverfahrens $A = \frac{1}{6}$ und $B = \frac{17}{6}$ folgt.

Der weitere Lösungsgang deckt sich mit dem bereits entwickelten.

In den folgenden Beispielen werden die Koeffizienten ausschließlich durch das Einsetzungsverfahren bestimmt.

$$\int \frac{(x^2 - 31x + 94) dx}{x^3 + 4x^2 - 19x + 14}$$

Lösung: Die Nullstelle $x_1 = 1$ erkennt man leicht. Die Division $N(x):(x-1)$ führt auf eine quadratische Gleichung. Somit sind

$$x_2 = 2 \qquad x_3 = -7$$

die restlichen Lösungen.

Also ist

$$N(x) = (x-1)(x-2)(x+7).$$

Die Nullstellen der Nennerfunktion sind sämtlich reell und einfach, deshalb gilt der Ansatz

$$\boxed{\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} + \dots + \frac{M}{x-x_m}} \qquad (228)$$

in dem die x_i die Nullstellen von $N(x)$ und die $A; B; \dots; M$ die noch zu bestimmenden Koeffizienten sind. Speziell für das Beispiel ergibt sich aus (228) demnach:

$$\frac{x^2 - 31x + 94}{x^3 + 4x^2 - 19x + 14} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+7}.$$

Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner

$(x-1)(x-2)(x+7) = x^3 + 4x^2 - 19x + 14$ erhält man:

$$x^2 - 31x + 94 = A(x-2)(x+7) + B(x-1)(x+7) + C(x-1)(x-2).$$

Daraus folgt

$$\text{für } x = x_1 = 1 \qquad 64 = A(1-2)(1+7)$$

$$\text{für } x = x_2 = 2 \qquad 36 = B(2-1)(2+7)$$

$$\text{für } x = x_3 = -7 \qquad 360 = C(-7-1)(-7-2).$$

Deshalb ist

$$A = -8$$

$$B = 4$$

$$C = 5.$$

Damit wird

$$\frac{x^2 - 31x + 94}{x^3 + 4x^2 - 19x + 14} = \frac{-8}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{5}{x+7}$$

und deshalb auch

$$\int \frac{(x^2 - 31x + 94) dx}{x^3 + 4x^2 - 19x + 14} = -8 \int \frac{dx}{x-1} + 4 \int \frac{dx}{x-2} + 5 \int \frac{dx}{x+7} = -8 \ln|x-1| + 4 \ln|x-2| + 5 \ln|x+7| + C = \ln \left| \frac{(x-2)^4 (x+7)^5}{(x-1)^8} \right| + C.$$

3a 2. $\int \frac{(x+20) dx}{x^2 + 5x - 6}$

Lösung: Nullstellen der Nennerfunktion: $x_1 = 1$; $x_2 = -6$.

$$\frac{x+20}{x^2+5x-6} = \frac{x+20}{(x-1)(x+6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+6}$$
$$x+20 = A(x+6) + B(x-1).$$

Einsetzungsverfahren: $x = x_1 = 1$ $21 = 7A$
 $x = x_2 = -6$ $14 = -7B$

Daraus folgen $A = 3$ und $B = -2$. Somit lautet die Zerlegung:

$$\frac{x+20}{x^2+5x-6} = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+6}$$

und die Lösung

$$\int \frac{(x+20) dx}{x^2+5x-6} = 3 \ln|x-1| - 2 \ln|x+6| + C = \ln \left| \frac{(x-1)^3}{(x+6)^2} \right| + C.$$

3a 3. $\int \frac{(11x+16) dx}{x^2-2x-8}$

Lösung: Nullstellen der Nennerfunktion: $x_1 = 4$; $x_2 = -2$.

$$\frac{11x+16}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$
$$11x+16 = A(x+2) + B(x-4)$$

Einsetzungsverfahren:

$$x = x_1 = 4 \quad 60 = 6A \quad A = 10$$

$$x = x_2 = -2 \quad -6 = -6B \quad B = 1$$

$$\frac{11x+16}{x^2-2x-8} = \frac{10}{x-4} + \frac{1}{x+2}.$$

Folglich ist

$$\int \frac{(11x + 16) dx}{x^3 - 2x - 8} = 10 \ln |x - 4| + \ln |x + 2| + C = \ln |(x - 4)^{10} (x + 2)| + C.$$

3b Der Nenner des Integranden hat mehrfache reelle Nullstellen

Das Integral

$$\int \frac{-14x^4 + 5x^3 + 44x^2 - 8x + 18}{(x - 1)^3 (x + 2)^2} dx$$

hat als Nullstellen des Nenners

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1, \quad x_4 = x_5 = -2.$$

Man sagt, die Nullstelle 1 habe die Vielfachheit 3 (oder ist eine 3fache Nullstelle), die Nullstelle -2 die Vielfachheit 2 (eine 2fache Nullstelle).

Man erkennt, daß der Ansatz

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{x + 2} + \frac{E}{x + 2}$$

falsch wäre, denn die gleichnamigen Brüche der rechten Seite können zusammengefaßt werden, und der Hauptnenner der rechten Seite würde nicht mit $N(x)$ übereinstimmen. Vielmehr führt hier der Ansatz

$$\frac{-14x^4 + 5x^3 + 44x^2 - 8x + 18}{(x - 1)^3 (x + 2)^2} = \frac{A_3}{(x - 1)^3} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{A_1}{x - 1} + \frac{B_2}{(x + 2)^2} + \frac{B_1}{x + 2}$$

zum Ziel, weil $(x - 1)^3 (x + 2)^2$ Hauptnenner aller Partialbrüche ist. Dabei treten neben der höchsten Potenz $(x - 1)^3$ auch jeweils die niedrigeren $(x - 1)^2$ und $(x - 1)$ auf, die mit im Hauptnenner enthalten sind.

Durch Multiplikation mit $N(x)$ erhält man

$$\begin{aligned} -14x^4 + 5x^3 + 44x^2 - 8x + 18 &= A_3(x + 2)^2 + A_2(x - 1)(x + 2)^2 + \\ &+ A_1(x - 1)^2(x + 2)^2 + B_2(x - 1)^3 + B_1(x - 1)^3(x + 2). \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der fünf Koeffizienten setzt man wieder fünf spezielle x -Werte ein. Da nur zwei verschiedene Nullstellen vorhanden sind, wählt man noch drei beliebige x -Werte.

So ergibt sich

für $x = x_1 = 1$

$$45 = 9A_3$$

für $x = x_2 = -2$

$$-52 = -27B_2$$

für $x = 0$

$$18 = 4A_1 - 4A_2 + 4A_3 - 2B_1 - B_2$$

für $x = -1$

$$51 = 4A_1 - 2A_2 + A_3 - 8B_1 - 8B_2$$

für $x = 2$

$$-6 = 16A_1 + 16A_2 + 16A_3 + 4B_1 + B_2.$$

Aus den beiden ersten Beziehungen folgen die Werte

$$A_3 = 5 \text{ und } B_2 = 2.$$

Setzt man diese Koeffizienten in die drei restlichen Gleichungen ein, so erhält man:

$$\begin{cases} 0 = 2A_1 - 2A_2 - B_1 \\ 31 = 2A_1 - A_2 - 4B_1 \\ -22 = 4A_2 + 4A_3 + B_1 \end{cases}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems führt auf

$$\begin{aligned} A_1 &= -4 \\ A_2 &= 1 \\ B_1 &= -10. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int \frac{(-14x^4 + 5x^3 + 44x^2 - 8x + 18) dx}{(x-1)^3(x+2)^2} &= 5 \int \frac{dx}{(x-1)^3} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} - 4 \int \frac{dx}{x-1} + \\ &+ 2 \int \frac{dx}{(x+2)^2} - 10 \int \frac{dx}{x+2}. \end{aligned}$$

Neben Integralen der Form $\int \frac{du}{u}$ ist hier das Grundintegral $\int u^n du$ zu erkennen. Nach 31.1.1. erhält man für

$$\begin{aligned} 5 \int \frac{dx}{(x-1)^3} \text{ mit der Substitution } x-1 &= u \quad dx = du \\ 5 \int \frac{du}{u^3} &= 5 \int u^{-3} du = \frac{-5u^{-2}}{2} = \frac{-5}{2} (x-1)^{-2}. \end{aligned}$$

Als Lösung der Aufgabe erhält man:

$$\begin{aligned} \int \frac{(-14x^4 + 5x^3 + 44x^2 - 8x + 18) dx}{(x-1)^3(x+2)^2} &= \frac{-5}{2(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} - 4 \ln|x-1| - \\ &- \frac{2}{x+2} - 10 \ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

Stellt man das Verfahren am allgemeinen Beispiel dar, so wird es in der Schreibweise recht umständlich. Man halte sich deshalb jeweils einen speziellen Fall vor Augen, damit man die im gezeigten Beispiel vollzogenen Schritte wiedererkennt.

$$\text{Es sei } N(x) = (x-x_1)^\alpha (x-x_2)^\beta (x-x_3)^\gamma \cdots (x-x_k)^\varkappa.$$

Dabei soll x_1 eine α -fache, x_2 eine β -fache, \dots und x_k eine \varkappa -fache Nullstelle sein. Wenn $N(x)$ vom m -ten Grade sein soll, so gilt

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \varkappa = m.$$

Man setzt

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-x_1)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-x_1)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-x_1} +$$

$$+ \frac{B_\beta}{(x-x_2)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-x_2)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_1}{x-x_2} +$$

$$+ \frac{C_\gamma}{(x-x_3)^\gamma} + \frac{C_{\gamma-1}}{(x-x_3)^{\gamma-1}} + \cdots + \frac{C_1}{x-x_3} +$$

$$+ \cdots$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{K_\kappa}{(x-x_k)^\kappa} + \frac{K_{\kappa-1}}{(x-x_k)^{\kappa-1}} + \cdots + \frac{K_1}{x-x_k}$$

Die A_i, B_i, \dots, K_i sind unbekannt.

Man multipliziert (229) mit

$$N(x) = (x-x_1)^\alpha (x-x_2)^\beta \dots (x-x_k)^\kappa$$

und wendet das Einsetzungsverfahren zur Bestimmung der Koeffizienten an.

Erwähnt sei, daß die Formel (229) die Formel (228) als Sonderfall enthält. Hat $N(x)$ nur reelle einfache Nullstellen, so ist in (229) lediglich $\alpha = \beta = \gamma = \dots = \kappa = 1$ zu setzen.

4

$$\int \frac{(x^2 + 15x + 8) dx}{x^3 - 3x^2 - 9x - 5}$$

Lösung: Im Nenner ist die Nullstelle $x_1 = -1$ erkennbar. Nach entsprechender Division erhält man die beiden anderen Nullstellen $x_2 = -1$ und $x_3 = 5$. Also gilt:

$$\frac{x^2 + 15x + 8}{x^3 - 3x^2 - 9x - 5} = \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_1}{x+1} + \frac{B_1}{x-5}$$

$$x^2 + 15x + 8 = A_2(x-5) + A_1(x+1)(x-5) + B_1(x+1)^2$$

Einsetzungsverfahren:

$$\begin{array}{lll} x = x_1 = -1 & -6 = -6A_2 & A_2 = 1 \\ x = x_3 = 5 & 108 = 36B_1 & B_1 = 3 \\ x = 0 & 8 = -5A_1 - 5A_2 + B_1 & A_1 = -2. \end{array}$$

Also gilt:

$$\int \frac{Z(x) dx}{N(x)} = \int \frac{dx}{(x+1)^2} - 2 \int \frac{dx}{x+1} + 3 \int \frac{dx}{x-5} = \underline{\underline{-\frac{1}{x+1} + \ln \left| \frac{(x-5)^3}{(x+1)^2} \right| + C}}$$